

Selbstinjektive und einfach zusammenhängende Algebren

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung der Philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der
Universität Zürich

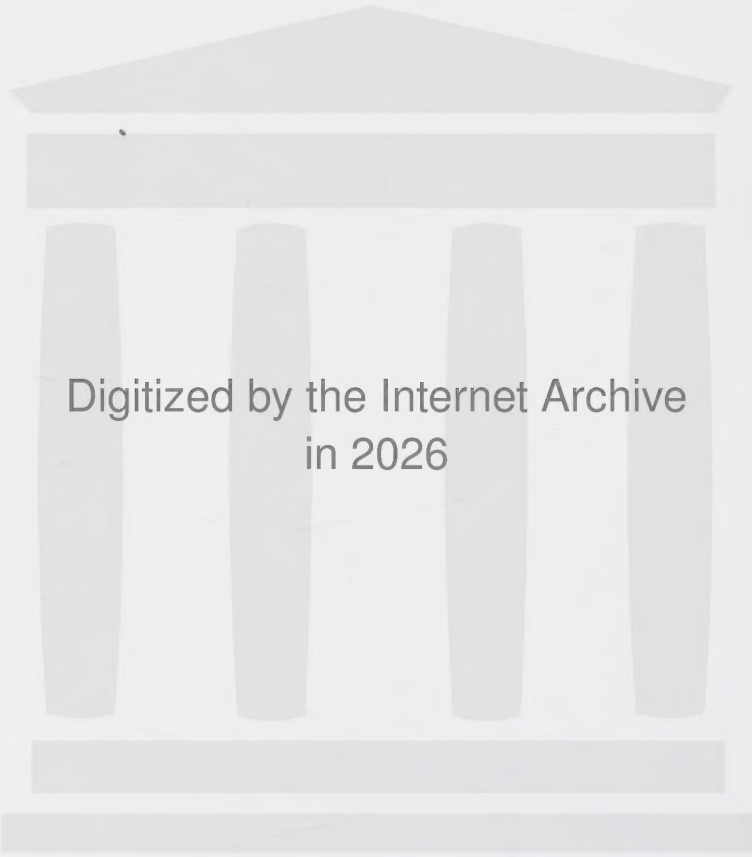
von
OTTO BRETSCHER
aus Dorf b. Andelfingen (Kt. Zürich)

Begutachtet von Herrn Prof. Dr. P. Gabriel



Juris Druck + Verlag Zürich
1981

1982



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Selbstinjektive und einfach zusammenhängende Algebren

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung der Philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der
Universität Zürich

von
OTTO BRETSCHER
aus Dorf b. Andelfingen (Kt. Zürich)

Begutachtet von Herrn Prof. Dr. P. Gabriel



Juris Druck + Verlag Zürich
1981

Selbstinjektive und ähnliche zusammenhängende Algebren

WOLFGANG SCHARF

Das Zentrum der Mathematik, Bonn

Erste Auflage

1977

1977

1977



ISBN 3 260 04921 5

1. Konfigurationen

1.1 Sei Δ ein Dynkingraph; sei C eine Teilmenge der Punktmenge von $\mathbb{Z}\Delta$. Wir definieren den Translationsköcher $\mathbb{Z}\Delta_C$ wie folgt: Für jeden Punkt x von C fügen wir dem Translationsköcher $\mathbb{Z}\Delta$ einen Punkt x^* sowie Pfeile $x \rightarrow x^*$ und $x^* \rightarrow \tau^{-1}x$ hinzu. Auf x^* wird τ nicht definiert; folglich ist x^* sowohl projektiv wie auch injektiv in $\mathbb{Z}\Delta_C$.

• DEFINITION. Wir nennen eine Teilmenge C von $\mathbb{Z}\Delta_0$ eine Konfiguration, falls $\mathbb{Z}\Delta_C$ ein Riedtmannköcher ist ([3], 2.9).

1.2 Für einen Dynkingraphen Δ sei v_Δ die Nakayama-Permutation von $\mathbb{Z}\Delta$ ([2], 6.5) und

$$M_\Delta = \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \text{Für alle Wege } w \text{ in } \mathbb{Z}\Delta \text{ mit} \right. \\ \left. \text{Länge } n \text{ ist } 0 = \bar{w} \in k(\mathbb{Z}\Delta) \right\}$$

Man hat:

$$M_{A_n} = n ; M_{D_n} = 2n-3 ; M_{E_6} = 11 ; M_{E_7} = 17 ; M_{E_8} = 29$$

PROPOSITION. Sei C eine Konfiguration auf $\mathbb{Z}\Delta$. Dann gilt: $\tau^{M_\Delta} C = C$.

KOROLLAR. Die Zahl n_Δ der Konfigurationen für den Dynkingraphen Δ ist endlich. Es gilt:

$$n_{A_n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} ; n_{D_n} = \frac{3n-4}{2n} \binom{2n-2}{n-1} \quad \text{für } n \geq 3 ;$$

$$n_{E_6} = 418 ; n_{E_7} = 2431 ; n_{E_8} = 17342$$

Beweis. Sei Λ die volle Unterkategorie der Maschen-
 kategorie $k(\mathbb{Z}\Delta_C)$, die aus den projektiven Punkten be-
 steht. Als Repräsentanten der unzerlegbaren Λ -Moduln wählen
 wir die Moduln $M(x) : p \mapsto k(\mathbb{Z}\Delta_C)(p, x)$, die den Punkten x
 aus $\mathbb{Z}\Delta_C$ zugeordnet sind. Damit erhalten wir einen Iso-
 morphismus von $k(\mathbb{Z}\Delta_C)$ auf $\text{ind}\Lambda$ ([3], 2.4). Ist $x \in C$,
 so ist der Λ -Modul $M(x^*)$ projektiv und injektiv, $M(x)$
 ist das Radikal von $M(x^*)$, $M(\tau^{-1}x)$ der Restklassenmodul
 von $M(x^*)$ nach dem Sockel. Wir wollen zeigen, dass
 $M(\tau^{-M_\Delta}x)$ das Radikal der injektiven Hülle E von
 $M(x^*)/M(x)$ ist, was unsere Proposition impliziert. Sei s
 der Punkt aus $\mathbb{Z}\Delta$ mit $M(s) = M(x^*)/M(x)$. Wegen τ^{-M_Δ}
 $= \tau^{-1} v_\Delta^2$ genügt es zu zeigen, dass $M(v_\Delta^{-1}s)$
 $\cong M(x^*)/\text{soc } M(x^*)$ und $M(v_\Delta s) = M(y) \cong \text{rad } M(y^*)$, wobei
 $M(y^*) \cong E$. Wir beweisen die erste Gleichung: Sei w ein
 Weg von $v_\Delta^{-1}s$ nach s mit $0 \neq \bar{w} \in k(\mathbb{Z}\Delta_C)$. In $\text{ind}\Lambda$
 faktorisiert die kanonische Projektion $\pi : M(x^*)/\text{soc } M(x^*)$
 $\rightarrow M(s)$ durch $M(\bar{w}) : \pi = M(\bar{w})\phi$. Wäre ϕ kein Isomor-
 phismus, so hätte man

$$\phi \in \underline{R}(M(x^*)/\text{soc } M(x^*), M(v_\Delta^{-1}s))$$

$$\underline{M}(\bar{w}) \in \underline{R}^{M_\Delta-1}(M(v_\Delta^{-1}s), M(s))$$

in der zu $k(\mathbb{Z}\Delta)$ isomorphen stabilen Kategorie zu $\text{ind}\Lambda$.
 Dies würde zum Widerspruch

$$0 \neq \underline{\pi} \in \underline{R}^{M_\Delta}(M(x^*)/\text{soc } M(x^*), M(s))$$

führen.

1.3 Wir studieren Konfigurationen im Hinblick auf das
 Problem der Klassifikation der selbstinjektiven darstel-
 lungsendlichen Algebren. Wir wollen die Beziehung kurz er-
 läutern. Sei Δ ein fest gewählter Dynkingraph. Dann
 liefert

$$\left\{ \mathbb{Z}\Delta_C/\Pi : \begin{array}{l} C: \text{Konfiguration auf } \mathbb{Z}\Delta, \Pi: \text{zulässige,} \\ \text{mit } C \text{ verträgliche Automorphismengruppe} \\ \text{von } \mathbb{Z}\Delta \end{array} \right\}$$

die Isomorphieklassen der Auslander-Reiten-Köcher der selbstinjektiven, darstellungsendlichen Algebren vom Typ Δ , also die Standard-Algebren dieses Typs ([3], §5).

In [5], 4.6 wird gezeigt, dass alle Algebren vom Typ A_n standard sind.

In den Fällen E_6 , E_7 und E_8 lassen sich wohlgestaltete Funktoren konstruieren analog zum "general case" von [5], 4.6, denn als zulässige, mit den Konfigurationen verträgliche Automorphismengruppen treten hier lediglich die $\tau^{kM_\Delta} \mathbb{Z}$ ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) und, im Falle von E_6 , die $(\tau^{k \cdot 11})_\phi \mathbb{Z}$ ([1], Anhang 2) auf (wegen Proposition 1.2 und wegen der Tatsache, dass die M_Δ prim sind).

Im Fall D_n treten dagegen, wie im Fall A_n , grosse Automorphismengruppen auf (das heisst: $\tau^{k\mathbb{Z}}$ mit $k < M_\Delta$). Nach Riedtmann gelingt die Konstruktion eines wohlgestalteten Funktors nicht immer im Falle von $\text{char } k = 2$ für selbstinjektive Algebren A mit

$$\Gamma_A \cong \mathbb{Z}D_3d / \tau^{(2d-1)\mathbb{Z}}, \quad d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

2. Schnittalgebren

2.1 Sei $\vec{\Delta}$ ein Dynkinköcher

DEFINITION. Eine einfach zusammenhängende ([3], §6) Algebra A zusammen mit einem Isomorphismus σ von $\vec{\Delta}$ auf einen Schnitt durch Γ_A ([4], 2.5) bezeichnen wir als $\vec{\Delta}$ -Schnittalgebra.

Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist der folgende Satz:

SATZ. Für jeden Dynkinköcher $\vec{\Delta}$ entsprechen die Konfigurationen auf $\vec{\Delta}$ bijektiv den Isomorphieklassen von $\vec{\Delta}$ -Schnittalgebren.

Wir führen den Beweis in den Paragraphen 3 und 4.

2.2 Als Repräsentanten der Isomorphieklassen von $\vec{\Delta}$ -Schnittalgebren wählen wir die Riedtmannschen Teil-Translationsköcher von $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$, die $(0, \vec{\Delta})$ als Schnitt enthalten, zusammen mit dem Isomorphismus $\sigma: \vec{\Delta} \xrightarrow{\sim} (0, \vec{\Delta})$. Eine solche $\vec{\Delta}$ -Schnittalgebra ist bestimmt durch die Lage ihrer projektiven Punkte in $\mathbb{Z}\vec{\Delta}_0$. Dies motiviert folgende

DEFINITION. Eine Teilmenge M von $\mathbb{Z}\vec{\Delta}_0$ bezeichnen wir als Muster auf $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$, falls sie die Menge der projektiven Punkte eines Repräsentanten der $\vec{\Delta}$ -Schnittalgebren ist.

Satz 2.1 lässt sich jetzt auch wie folgt formulieren:
Für jeden Dynkinköcher $\vec{\Delta}$ entsprechen die Muster auf $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$ bijektiv den Konfigurationen auf $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$.

2.3 Für jeden Dynkinköcher $\vec{\Delta}$ hat man eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphieklassen von} \\ \vec{\Delta}\text{-Schnittalgebren} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphieklassen von} \\ \text{quadratfreien} \\ k\vec{\Delta}\text{-Kippmoduln} \end{array} \right\}$$

$$(A, \sigma) \rightarrow \bigoplus_{\substack{p: \text{proj.} \\ d \in \vec{\Delta}_0}} k(\Gamma_A)(p, \sigma d)$$

3. Die Schnittalgebra einer Konfiguration

3.1 Sei $\vec{\Delta}$ ein Dynkinköcher. Wir wollen den vollen Unterköcher von $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$ bestehend aus den Punkten $(0, d)$, $d \in \vec{\Delta}_0$, mit $\vec{\Delta}$ identifizieren. Für einen Punkt x von $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$ soll die Bezeichnung " $x \leq \vec{\Delta}$ " bedeuten, dass es von x aus in $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$ einen Weg zu einem Punkt von $\vec{\Delta}$ gibt. Analog wird die Relation " $\vec{\Delta} \leq x$ " definiert.

Sei C eine Konfiguration auf $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$. Wir betrachten die Algebra

$$A_C = \bigoplus_{\substack{p, q: \text{projektiv} \\ \tau^{\mathcal{M}_A} \vec{\Delta} \leq p, q \leq \vec{\Delta}}} k(\mathbb{Z}\vec{\Delta}_C)(p, q)$$

Man erhält eine Bijektion

$$S_C = \left\{ e \in (\mathbb{Z}\vec{\Delta}_C)_0 : \begin{array}{l} k(\mathbb{Z}\vec{\Delta}_C)(p, e) = \{0\} \\ \text{für alle projektiven} \\ p \text{ mit } p \geq \vec{\Delta} \text{ oder} \\ p \leq \tau^{\mathcal{M}_A} \vec{\Delta} \end{array} \right\} \xrightarrow{\varepsilon} (\Gamma_{A_C})_0$$

$$e \mapsto \bigoplus_{\substack{p: \text{projektiv} \\ \tau^{\mathcal{M}_A} \vec{\Delta} \leq p \leq \vec{\Delta}}} k(\mathbb{Z}\vec{\Delta}_C)(p, e)$$

Aus dem Beweis von Proposition 1.2 folgt, dass die Punkte von $\vec{\Delta}$ in S_C liegen. Hat man zwischen zwei Punkten d_1 und d_2 von S_C einen Pfeil α , so gibt es in Γ_{A_C} einen Pfeil von $\varepsilon(d_1)$ nach $\varepsilon(d_2)$; wir wollen diesen Pfeil $\varepsilon(\alpha)$ nennen. Wir werden in 3.2, 3.3 und 3.4 zeigen, dass $\varepsilon(\vec{\Delta})$ ein Schnitt durch Γ_{A_C} ist. Da Γ_{A_C} zykellos ist, ist nach [4], Lemma 2.5 A_C einfach zusammenhängend, also ist A_C zusammen mit $\varepsilon|_{\vec{\Delta}}$ eine $\vec{\Delta}$ -Schnittalgebra.

3.2 LEMMA. Für alle e in S_C gilt:

$$\text{Ext}_{A_C}^1(\varepsilon(e), \varepsilon(d)) = \{0\} \text{ für alle } d \in \vec{\Delta}_0 \quad \Leftrightarrow \quad e \leq \vec{\Delta}$$

Beweis. $\text{Ext}_{A_C}^1(\varepsilon(e), \varepsilon(d)) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Ext}_{A_C}^1(e, d) = \{0\}$
 $\Leftrightarrow \text{DHom}(\tau^{-1}d, e) = \{0\} \quad ([2], 2.3)$

LEMMA. Für alle e in S_C gilt:

$$\text{Ext}_{A_C}^1(\varepsilon(d), \varepsilon(e)) = \{0\} \text{ für alle } d \in \vec{\Delta}_0 \quad \Leftrightarrow \quad e \geq \vec{\Delta}$$

3.3 LEMMA. Für alle d in $\vec{\Delta}_0$ gilt: $\text{pdim } \varepsilon(d) \leq 1$

Beweis. Wegen [4], 2.2 haben wir zu zeigen, dass $\text{Hom}_{A_C}(I, \tau \epsilon(d)) = \{0\}$ ist für alle injektiven Darstellungen I von A_C . Wir weisen nach, dass $k(\mathbb{Z}\tilde{\Delta}_C)(\epsilon^{-1}I, \epsilon^{-1}\tau \epsilon d) = \{0\}$ gilt für alle Injektiven I von A_C . Dies folgt aber aus der Tatsache, dass $\epsilon^{-1}I \geq \tilde{\Delta}$ (für jedes projektive p aus $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}_C$ mit $\tau^M \tilde{\Delta} \leq p \leq \tilde{\Delta}$ existiert ein $d \in \tilde{\Delta}_0$ mit $k(\mathbb{Z}\tilde{\Delta}_C)(p, d) \neq \{0\}$) und $\epsilon^{-1}\tau \epsilon d \not\geq \tilde{\Delta}$ ist.

FOLGERUNG. Die Zahl der Punkte von $\tilde{\Delta}$ ist gleich der Zahl der Isomorphieklassen von einfachen Darstellungen von A_C , also gleich der Zahl der projektiven Punkte p in $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}_C$ mit $\tau^M \tilde{\Delta} \leq p \leq \tilde{\Delta}$.

Beweis. [4], 2.1

3.4 SATZ. $\epsilon(\tilde{\Delta})$ ist ein Schnitt durch Γ_{A_C} .

Beweis. Wir haben vorerst nachzuweisen, dass $\epsilon(\tilde{\Delta}_0)$ genau ein Objekt aus jeder τ -Bahn von Γ_{A_C} enthält. Weil Γ_{A_C} zykellos ist und wegen Folgerung 3.3 genügt es zu zeigen, dass für zwei verschiedene Punkte d und d' von $\tilde{\Delta}$ $\epsilon(d)$ und $\epsilon(d')$ nicht in derselben τ -Bahn liegen können. Angenommen, doch; es sei $\epsilon(d') = \tau^{-n}\epsilon(d)$ für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann muss es einerseits von $\epsilon^{-1}\tau^{-1}\epsilon d$ nach d' einen Weg geben in $\mathbb{Z}\tilde{\Delta}_C$, also ist $\epsilon^{-1}\tau^{-1}\epsilon d \leq \tilde{\Delta}$; andererseits ist $\text{Ext}_{A_C}^1(\tau^{-1}\epsilon d, \epsilon d) \neq \{0\}$, also ist $\epsilon^{-1}\tau^{-1}\epsilon d \not\leq \tilde{\Delta}$ (Lemma 3.2); Widerspruch.

Wir haben weiter zu zeigen, dass $\epsilon(\tilde{\Delta}_1)$ genau einen Pfeil aus jeder σ -Bahn von Γ_{A_C} enthält. Sei also β^σ eine derartige Bahn, die die τ -Bahnen x^τ und y^τ verbindet. In x^τ gibt es genau ein $x' \in \epsilon(\tilde{\Delta}_0)$; ebenso gibt es in y^τ genau ein $y' \in \epsilon(\tilde{\Delta}_0)$. Wir haben zu zeigen, dass x' und y' durch einen Pfeil aus β^σ verbunden werden. Angenommen, nicht. Dann gibt es in Γ_{A_C} von x' nach y' oder von y' nach x' einen Weg, der $\tilde{\Delta}_C$ über einen von x' und y' verschiedenen Punkt z aus x^τ oder y^τ läuft.

z liegt dann aber in $\varepsilon(\vec{\Delta}_0)$ (ist $x' \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \rightarrow y'$ eine Kette von Morphismen ungleich null mit $x_i \in \text{ind } A_C$, so gilt $x_i \in \varepsilon(\vec{\Delta}_0)$ für alle i); Widerspruch.

4. Die Konfiguration einer Schnittalgebra

4.1 Sei $\vec{\Delta}$ ein Dynkinköcher; sei M ein Muster auf $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$; sei NM der volle Unter-Translationsköcher von $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$ mit Punktmenge $\{\tau^{-n}m : n \in \mathbb{N}, m \in M\}$. Wir definieren eine Funktion $d: NM_0 \rightarrow \mathbb{N}$ per Induktion "von links nach rechts" wie folgt:

- a) $d(x) = \sum_{y \in x^-} d(y) + 1$ falls $x \in M$
- b) $d(x) = \sum_{y \in x^-} d(y) - d(\tau x)$ falls $x \notin M$ und $\sum_{y \in x^-} d(y) > d(\tau x)$
- c) $d(x) = d(\tau x)$ sonst

Dabei bezeichnet x^- die Menge der direkten Vorgänger von x in NM . Sei

$$P = \{c \in NM_0 : \sum_{y \in c^+} d(y) \leq d(c)\},$$

wo c^+ die Menge der direkten Nachfolger von c in NM bezeichnet. Wir definieren den Translationsköcher R wie folgt: Für jeden Punkt c von P fügen wir dem Translationsköcher NM einen Punkt c^* sowie Pfeile $c \rightarrow c^*$ und $c^* \rightarrow \tau^{-1}c$ hinzu. c^* sei sowohl projektiv wie auch injektiv.

4.2 SATZ. R ist ein Riedtmannköcher, und für $c \in P$ gilt $\tau^{-M}c \in P$.

Beweis. Wir erweitern zunächst d zu einer Funktion $d^*: R_0 \rightarrow \mathbb{N}$, indem wir $d^*(c^*) = d(c) + 1$ setzen, falls $c \in P$. Die Funktion d^* ist maschen-additiv auf R , d.h. es gilt $(*) d^*(x) + d^*(\tau^{-1}x) = \sum_y d^*(y)$, wo y alle Nachfolger von x in R durchläuft und x als

nicht injektiv vorausgesetzt ist: Wir beweisen diese Gleichung mit Induktion nach $\kappa(x)$, wobei $\kappa: R \rightarrow \mathbb{Z}A_2$ der Köchermorphismus mit $\min_{d \in \vec{\Delta}_0} \kappa(d) = 0$ ist.

Die Gleichung $(*)$ gelte für Punkte x mit $\kappa(x) < t$. Aus [3], §6 folgt unmittelbar, dass die projektiven Punkte $p \in R_0$ mit $\kappa(p) \leq t$ die projektiven Punkte eines endlichen Riedtmannschen Teil-Translationsköchers R_t von R sind. Bei unseren Ueberlegungen ersetzen wir die Dimensionsvektoren von [3], §6 durch die Dimension, was offensichtlich zulässig ist. Die Punkte von R_t mit Potential $\leq t$ stimmen mit denjenigen von R überein. Wegen $(*)$ sind die projektiven Punkte p von R_t , die nicht in M liegen, auch injektiv.

Ein Punkt $c \in P$ mit $\kappa(c) = t$ muss injektiv in R_t sein; also gilt $d^*(c) = \sum_{y \in c^+} d^*(y) + 1$, weil $d^*(c)$ und $d^*(y)$ mit den in R_t berechneten Dimensionen zusammenfallen. Folglich gilt $(*)$ für $x = c$ und dann auch allgemein.

Sei nun t gross genug, Λ_t die volle Unterkategorie von $k(R_t)$ bestehend aus den Projektiven, $M(x)$ der Λ_t -Modul zu einem Punkt x aus R_t . Sei $c \in P \cap R_t$. Ähnlich wie in Proposition 1.2 zeigt man, dass $M(\tau^{-M_t} c^*)$ die injektive Hülle von $M(c^*)/M(c)$ ist. Daraus folgt die Periodizität sowie die Tatsache, dass R ein Riedtmannköcher ist (man verifiziere die Bedingungen von [3], 2.8, indem man sich auf R_t für genügend grosses t einschränkt).

Wir können jedem Muster M auf $\vec{\Delta}$ eine Konfiguration C_M auf $\vec{\Delta}$ in der folgenden Weise zuordnen: Wir interpretieren P als Teilmenge von $\vec{\Delta}$ und definieren

$$C_M = \{\tau^{tM} c : t \in \mathbb{N}, c \in P\}$$

4.3 Wir haben jetzt nachzuweisen, dass die Konstruktionen $C \mapsto A_C$ in 3.1 und $M \mapsto C_M$ in 4.2 invers zueinander sind.

Dabei gehen wir von folgenden Tatsachen aus:

Eine Konfiguration C auf $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$ ist eindeutig bestimmt durch die Abbildung

$$d_C: \vec{\Delta}_0 \rightarrow \mathbb{N}; \quad d \mapsto x: \sum_{\text{proj.}} \dim k(\mathbb{Z}\vec{\Delta}_C)(x, d)$$

Ebenso ist ein Muster M auf $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$ eindeutig bestimmt durch die Abbildung

$$d_M: \vec{\Delta}_0 \rightarrow \mathbb{N}; \quad d \mapsto m \in \sum_M \dim k(MM)(m, d)$$

Es genügt zu zeigen, dass $d_C = d_{A_C}$ für jede Konfiguration C auf $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$ und $d_M = d_{C_M}$ für jedes Muster M auf $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$ gilt.

Die erste Gleichung ist klar; die zweite folgt aus $x: \sum_{\text{proj.}} \dim k(R)(x, d) = x: \sum_{\text{proj.}} \dim k(R)(x, (M_\Delta, d))$ (für alle d in $\vec{\Delta}_0$), wo R definiert ist wie in 4.1.

5. Bestimmung der selbstinjektiven Standardalgebren durch Köcher und Relationen

Sei $\vec{\Delta}$ ein Dynkinköcher, C eine Konfiguration auf $\mathbb{Z}\vec{\Delta}$, $A = A_C$ die zugeordnete $\vec{\Delta}$ -Schnittalgebra, $\Lambda = \Lambda_C$ die volle Unterkategorie von $k(\mathbb{Z}\vec{\Delta}_C)$ bestehend aus den projektiven Punkten. Wir wollen zeigen, wie Λ aus A gewonnen werden kann.

5.1 SATZ. Sei Λ eine lokal darstellungsendliche Kategorie, Γ_Λ sei einfach zusammenhängend. Bezeichnen wir mit Q den Köcher von Λ , so ist $\Lambda \cong kQ/I$ mit

$$I(x, y) = kQ(x, y) \quad \text{falls } \Lambda(x, y) = \{0\}$$

$I(x, y)$ wird erzeugt von den Differenzen der Wege von x nach y in Q falls $\Lambda(x, y) \neq \{0\}$

Beweis. Die Argumente von [6] lassen sich leicht auf unseren Fall übertragen. Folglich gilt $[\Lambda(x, y):k] \leq 1$

für alle x, y , und es gilt $\Lambda \cong kQ/I$, wobei die Vektorräume $I(x, y)$ von Wegen und Differenzen von Wegen aufgespannt werden.

Es genügt nun zu zeigen: Seien $x, y \in Q_0$, seien v, w Wege von x nach y in Q , sei $\bar{v} = 0$. Dann ist $\bar{w} = 0$.

Angenommen, nicht. Dann wählen wir unter allen Paaren (v, w) von Wegen in Q mit gleichem Anfangs- und Endpunkt und $\bar{v} = 0, \bar{w} \neq 0$ ein Paar (v_0, w_0) mit minimaler Weglänge von v_0 aus. Wir betrachten die volle Unterkategorie Λ' von Λ bestehend aus den Objekten $x_0, x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 2$) von Λ , die vom Weg v_0 getroffen werden. Der Köcher dieser Unterkategorie hat folgende Gestalt:



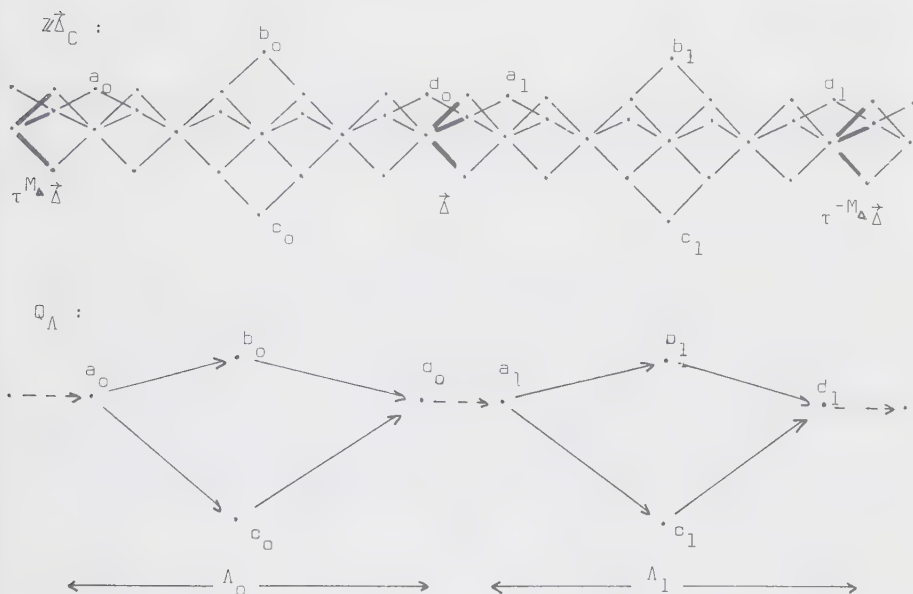
Wir betrachten nun die folgenden unzerlegbaren Darstellungen von Λ' :

$$\begin{array}{l}
 V_0 = \begin{array}{ccccccc} & & k & \longleftarrow 0 & \dots & 0 & \longleftarrow k \\ & \nearrow & & & & & \searrow \\ k & \xleftarrow{\hspace{1.5em}} & & & & & k \end{array}, \quad V_1 = \begin{array}{ccccccc} & & k & \longleftarrow k & \longleftarrow 0 & \dots & 0 \\ & \nearrow & & & & & \searrow \\ 0 & \xleftarrow{\hspace{1.5em}} & & & & & 0 \end{array} \\
 V_i = \begin{array}{ccccccc} & & 0 & \dots & k & \longleftarrow k & \dots & 0 \\ & \nearrow & & & & & & \searrow \\ 0 & \xleftarrow{\hspace{1.5em}} & & & & & & 0 \end{array}, \quad V_{n-2} = \begin{array}{ccccccc} & & 0 & \dots & 0 & \longleftarrow k & \longleftarrow k \\ & \nearrow & & & & & \searrow \\ 0 & \xleftarrow{\hspace{1.5em}} & & & & & 0 \end{array}
 \end{array}$$

Wir erhalten eine Kette $V_0 \rightarrow V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_{n-2} \rightarrow V_0$ von nicht-verschwindenden, nicht-invertierbaren Morphismen. Sei $L: \text{mod } \Lambda' \rightarrow \text{mod } \Lambda$ definiert wie in [6]. Die Anwendung von L auf obige Kette liefert einen Zyklus in Γ_Λ : Widerspruch.

5.2 Sei Q_Λ der gewöhnliche Köcher von Λ und $\Lambda_n = \{p \in \Lambda : \tau^{-(n-1)} M_{\Delta} \xrightarrow{\tau} p \leq \tau^{-n} M_{\Delta} \xrightarrow{\tau} \}$. Die Pfeile von Q_Λ , die zwei Punkte desselben Teilstücks Λ_n verbinden,

zeichnen wir voll. Die restlichen Pfeile von Q_Λ verbinden die Punkte eines Λ_n mit Punkten des folgenden Teilstücks $\Lambda_{n+1} = \tau^{-M_\Delta} \Lambda_n$; wir zeichnen sie gebrochen (fig. 5.2).



5.3 Die vollen Pfeile liefern die (gewöhnlichen) Köcher der vollen Unterkategorien Λ_n von Λ . Jeder Morphismus $0 \neq \mu \in \Lambda_n(x, y)$ lässt sich nach [3], 2.8 zu einem Morphismus $0 \neq v \in \Lambda(x, \tau^{-M_\Delta} x)$ zusammensetzen. Davon, sowie aus 5.1, leiten wir folgende Beschreibung von Λ ab:

Sei $\Lambda_0 = kQ/J$, wobei Q der Köcher von A ist. Wir konstruieren einen Köcher $\mathbb{Z}Q$ mit Punktmenge $\mathbb{Z} \times Q_0$ folgendermassen: Für jeden Pfeil $x \xrightarrow{\alpha} y$ von Q und jedes $n \in \mathbb{Z}$ setzen wir einen vollen Pfeil $(n, x) \xrightarrow{(n, \alpha)} (n, y)$ ein. Ferner setzen wir einen (gebrochenen) Pfeil

$(n,x) \rightarrow (n+1,y)$ ein, wenn es in Q einen Weg w von y nach x mit $w \notin J(y,x)$ gibt derart, dass $w\beta \in J$ und $\beta w \in J$ für alle Pfeile β aus Q .

Das Ideal I von $\mathbb{Z}Q$ definieren wir wie folgt: Für zwei Punkte $a = (n,x)$ und b in $\mathbb{Z} \times Q$ wird $I(a,b)$ erzeugt durch die Wege, die sich nicht zu einem Weg $(n,x) \rightarrow (n+1,x)$ ergänzen lassen, sowie durch die Differenzen der Wege von a nach b , die sich zu einem Weg $(n,x) \rightarrow (n+1,x)$ ergänzen lassen.

SATZ. $k\mathbb{Z}Q/I \cong \Lambda$.

5.4 Sei Π eine zulässige Automorphismengruppe von $\mathbb{Z}\Delta_C$. Das oben definierte Ideal I von $\mathbb{Z}Q$ ist offensichtlich stabil unter der induzierten Operation von Π auf der Köcherkategorie $kA \cong k(\mathbb{Z}Q)$. Folglich ist das Bild I_Π von I in $k(\mathbb{Z}Q/\Pi)$ ein Ideal, und die Restklassenkategorie $k(\mathbb{Z}Q/\Pi)/I_\Pi$ ist selbstinjektiv und standard. Das Verfahren liefert offensichtlich alle darstellungsendlichen, selbstinjektiven Standard-Algebren.

Literaturverzeichnis.

- [1] RIEDTMANN, C.: Algebren, Darstellungsköcher und zurück. Comment. Math. Helv. 55, 199-224 (1980)
- [2] GABRIEL, P.: Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras. In: Representation Theory I, LNM 831, pp. 1-71. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1980
- [3] BONGARTZ, K. und P. GABRIEL: Covering spaces in representation theory. Erscheint in den Inventiones Math.
- [4] BONGARTZ, K.: Tilted algebras. Proc. of the third Int. Conf. on Rep. of Alg., Puebla 1981
- [5] RIEDTMANN, C.: Representation-finite selfinjective algebras of class A_n . In: Representation Theory II, LNM 832, pp. 449-520. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1980
- [6] BONGARTZ, K.: Zykellose Algebren sind nicht zügellos. In: Representation Theory II, LNM 832, pp. 97-102. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1980
- [7] HAPPEL, D. und C.M. RINGEL: Tilted algebras. Erscheint in Trans. Amer. Math. Soc.

Lebenslauf

Ich, Otto Kaspar Bretscher, Bürger von Dorf b. Andelfingen, wurde am 27. Januar 1956 in Andelfingen geboren. Im Frühjahr 1969 trat ich ins Kantonale Gymnasium Winterthur ein. Im Herbst 1974 bestand ich an dieser Schule die Maturitätsprüfung (Typus A) und immatrikulierte mich an der Philosophischen Fakultät II der Universität Zürich. Im Frühjahr 1979 legte ich die Diplomprüfung mit Hauptfach Mathematik und den Nebenfächern Philosophie und Experimentalphysik ab. Meine Dissertation ist unter der Leitung von Prof. Dr. P. Gabriel entstanden. Seit Frühjahr 1979 bin ich am Mathematischen Institut der Universität Zürich als Assistent tätig.

Verzeichnis der Dozenten, an deren Vorlesungen und Seminaren ich teilgenommen habe:

K. Bongartz, P. Gabriel, P. Hess, H. Holzhey, P. Frhr. v. Hoyningen-Huene, H.H. Keller, H. Lübke, G. Mazzola, R. Meyer, H.H. Storrer, K. Strebel, F. Waldner, N. Wirth, A. Wyler

